Índice

- Leyes de exponentes.....5
- Polinomios.....15
- Productos notables I.....26
- Productos notables II.....35
- División polinómica.....43
- Teorema del resto y restos especiales.....56
- Divisibilidad polinomial.....65
- Factorización I.....74
- Factorización II.....85
- Radicación.....99
- Factorial y número combinatario.....111
- Binomio de Newton.....124
- Ecuaciones de primer grado.....136
- Ecuaciones de segundo grado.....149
- Ecuaciones polinomiales de grado arbitrario.....161
- Matrices y determinantes.....172
- Sistema de ecuaciones de dos o más variables.....182
- Desigualdades e inecuaciones de primer grado.....193
- Inecuaciones de segundo grado.....203
- Valor absoluto.....212
- Funciones I.....222
- Funciones II.....235
- Logaritmos I.....245

LEYES DE EXPONENTES

CAPÍTULO 1

MATEMÁTICA

Aprendizajes esperados

- Reconoce y aplica las distintas leyes de exponentes para reducir expresiones más complejas.
- Reconoce y diferencia las propiedades de potenciación y radicación.

Helicocuriosidades

Las unidades de medida del universo: distancias y escalas

Cuando miras la luz de las estrellas y galaxias estás viendo su pasado. Algunas están tan remotas, que su luz ha tardado miles de millones de años en llegar a la Tierra. Las vemos tal como eran en su juventud. Puede que ya no existan. Tan solo vemos su luz viajar por el espacio. Cuando hablamos de tamaño y de distancias en astronomía, nos referimos a magnitudes de tal dimensión que las unidades de medida que utilizamos habitualmente no nos sirven y debemos emplear otras que solo tienen sentido en el ámbito del universo. La unidad básica de distancia (longitud) usada en astronomía es el año luz (a. l.), que es la distancia recorrida por la luz en un año. Teniendo en cuenta que la luz en el vacío se mueve a 300 000 km/s, deducimos que un año luz equivale a

$1 \text{ año} = 365 \text{ días} \cdot 24 \text{ horas} \cdot 3600 \text{ s} = 31\ 536\ 000 \text{ s}$

$1 \text{ año luz (a. l.)} = 31\ 536\ 000 \text{ s} \cdot 300\ 000 \text{ km/s} = 9\ 460\ 800\ 000 \text{ km} \approx 9{,}46 \times 10^{12} \text{ km} \approx 9{,}5 \times 10^{15} \text{ m}$
$\approx 10^{13} \text{ km} \approx 10^{16} \text{ m}$ (unos 10 billones de km)

Como ejemplos de distancias en el universo podríamos citar los siguientes:

Estrella más cercana al Sol (Alfa Centauri): 4,3 a. l.

Distancia de la estrella polar al Sol: 300 a. l.

Longitud de la Vía Láctea: 100 000 a. l.

Galaxia más próxima a la Vía Láctea: 2 000 000 a. l.

Objetos más lejanos: 14 000 000 000 a. l.

Para distancias muy pequeñas se utiliza el nanómetro, el angstrom y el picómetro ($1 \text{ nm} = 10^{-9}$ m; $1 \text{ Å} = 10^{-10}$ m; $1 \text{ pm} = 10^{-12}$ m).

Si navegáramos en una nave espacial que viajase a la velocidad de la luz (cosa imposible en la actualidad), llegaríamos a la Luna en menos de 1 s. Al Sol tardaríamos 8 minutos y medio. Después de más de 5 horas abandonaríamos el sistema solar. Tardaríamos 4 años y 4 meses en llegar a Próxima Centauri, la estrella más próxima al Sol. Si salimos en dirección al brazo de Perseo, tardaríamos aún más de 20 000 años en abandonar la Vía Láctea. Tendríamos que esperar más de 2 millones de años para llegar a la cercana galaxia de Andromeda.

Helicoteoría

LEYES DE EXPONENTES

Concepto

Las leyes de exponentes constituyen un conjunto de proposiciones deducidas a partir de los axiomas del sistema de los números reales, que trata sobre el estudio de los exponentes y de las relaciones que se dan entre ellos.

Las operaciones algebraicas que permiten la presencia de los exponentes, son la potenciación y la radicación.

1. Potenciación (en $\mathbb{R}$)

Es aquella operación algebraica que se genera por la presencia del EXPONENTE NATURAL, el cual nos indica el número de veces que debe repetirse otra cantidad llamada base, como factor.

Algoritmo: $\boxed{a^n = b,\ n \in \mathbb{N}}$

donde n : exponente natural

a : base de la potencia

b : potencia enésima

Exponente natural no nulo

$$\boxed{a^n = \begin{cases} a & ,\ n = 1 \\ \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ veces}} & ,\ n > 1 \end{cases}}$$

Ejemplos explicativos

- $4^5 = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 1024$
- $(-2)^6 = (-2)(-2)(-2)(-2)(-2)(-2) = 64$
- $(-7)^3 = (-7)(-7)(-7) = -343$

Podemos establecer la siguiente regla de signos para potencias de base negativa:

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{Z}^+, \text{ se cumple} \\ (-a)^{2n} = +a^{2n} \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{Z}^+, \text{ se cumple} \\ (-a)^{2n+1} = -a^{2n+1} \end{array}}$$

Por ello: $(-3)^4 = +3^4 = 81$

$(-5)^3 = -5^3 = -125$

Recíprocamente, según la definición del exponente natural, se verifican

- $\underbrace{x^3 \cdot x^3 \cdot x^3 \cdot \ldots \cdot x^3}_{24 \text{ veces}} = (x^3)^{24}$
- $\underbrace{\sqrt[5]{a} \cdot \sqrt[5]{a} \cdot \sqrt[5]{a} \cdot \ldots \cdot \sqrt[5]{a}}_{80 \text{ veces}} = \sqrt[5]{a}^{80}$
- $\underbrace{\left(-\frac{m^2}{n^3}\right)\left(-\frac{m^2}{n^3}\right)\ldots\left(-\frac{m^2}{n^3}\right)}_{14 \text{ veces}} = \left(-\frac{m^2}{n^3}\right)^{14}$

Propiedades de la potenciación

Teorema 1

Multiplicación indicada de bases iguales.

$$\boxed{a^m \cdot a^n = a^{m+n},\ \{m; n\} \subset \mathbb{N}}$$

Ejemplos explicativos

- $3^3 \cdot 3 \cdot 3^2 = 3^{3+1+2} = 3^6 = 729$
- $x \cdot x^2 \cdot x^3 \cdot \ldots \cdot x^n = x^{1+2+3+\ldots+n} = x^{\frac{n(n+1)}{2}}$
- $m^{3x+4y} \cdot m^{5x-3y} = m^{3x+4y+5x-3y} = m^{8x+y}$

Teorema 2

División indicada de bases iguales.

$$\boxed{\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n},\ \ a \neq 0}$$

Ejemplos explicativos

- $\dfrac{(-m)^{1001}}{(-m)^{990}} = (-m)^{1001-990} = (-m)^{11} = -m^{11}$
- $\dfrac{x^{5x+3y+z}}{x^{3x+4y+z}} = x^{(5x+3y+z)-(3x+4y+z)} = x^{2x-y}$

Consecuencias del teorema 2

Corolario 1.- Ley del exponente cero.

$$\boxed{a^0 = 1,\ a \neq 0}$$

Ejemplos explicativos

- $\left(-\frac{3}{4}\right)^0 = 1$
- $\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)^0 = 1$

Corolario 2.- Ley del exponente negativo o del inverso multiplicativo.

$$\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n},\ \ a \neq 0},\ \ n \in \mathbb{Z}$$

Ejemplos explicativos

- $6^{-3} = \frac{1}{6^3} = \frac{1}{216}$
- $a^{-1} = \frac{1}{a}$
- $(-5)^{-4} = \frac{1}{(-5)^4} = \frac{1}{5^4} = \frac{1}{625}$

Teorema 3

Propiedad distributiva de la potenciación respecto a la multiplicación.

$$\boxed{(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n,\ n \in \mathbb{Z}}$$

Ejemplos explicativos

- $30^m = (2 \cdot 3 \cdot 5)^m = 2^m \cdot 3^m \cdot 5^m$
- $(x^2 - y^2)^3 = [(x+y)(x-y)]^3 = (x+y)^3 (x-y)^3$

Corolario 3.- Generalización del teorema 3.

$$\boxed{(a^m \cdot b^n \cdot c^p)^q = a^{mq} \cdot b^{nq} \cdot c^{pq}}$$

Ejemplo explicativo

- $(x^5 y^3 z^4)^2 = x^{10} y^6 z^8$

Teorema 4

Propiedad distributiva de la potenciación respecto de la división.

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n},\ b \neq 0}$$

Ejemplos explicativos

- $\left(\frac{3}{4}\right)^5 = \frac{3^5}{4^5} = \frac{243}{1024}$
- $\left(-\frac{7}{5}\right)^3 = -\frac{7^3}{5^3} = -\frac{343}{125}$
- $\left(\frac{x^3}{y^4}\right)^2 = \frac{(x^3)^2}{(y^4)^2} = \frac{x^6}{y^8},\quad y \neq 0$

Corolario 4.- Inverso multiplicativo de una fracción (equivalente del corolario 2).

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n,\ a \neq 0,\ b \neq 0},\ n \in \mathbb{Z}$$

Ejemplos explicativos

- $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{4^2}{3^2} = \frac{16}{9}$
- $\left(\frac{1}{8}\right)^{-3} = 8^3 = 512$
- $\left(-\frac{7}{6}\right)^{-4} = \left(-\frac{6}{7}\right)^4 = +\frac{6^4}{7^4} = \frac{1296}{2401}$

Teorema 5

Potencia de potencia.

$$\boxed{(a^m)^n = (a^n)^m = a^{mn}}$$

Ejemplos explicativos

- $(x^3)^4 = x^{3 \cdot 4} = x^{12}$
- $\left\{(2^2)^4\right\}^2 = 2^{2 \cdot 4 \cdot 2} = 2^{16} = 65\,536$
- Para $x \neq 0$, efectuemos

$$T = \left(\left(\left(\ldots\left(\left(x^{-10}\right)^{-9}\right)^{-8}\ldots\right)^8\right)^9\right)^{10}$$

$$T = x^{(-10)(-9)(-8)\ldots(-1)(0)(1)\ldots(8)(9)(10)} = x^0 = 1$$

Observación

I. $(a+b)^n \neq a^n + b^n,\ \forall n \in \mathbb{Z}^+,\ n > 1$

II. $(a^m)^n \neq a^{m^n},\ m, n \in \mathbb{Z}^+$

2. Radicación (en $\mathbb{R}$)

Es aquella operación algebraica que se genera por la presencia del EXPONENTE FRACCIONARIO, que consiste en hallar una cantidad llamada RAÍZ, de tal manera que elevado al valor del índice nos reproduce otra, denominada SUBRADICAL o RADICANDO.

Algoritmo: $\boxed{\sqrt[n]{a} = b,\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 2}$

donde n : índice del radical

a : subradical o radicando

b : raíz enésima

Existencia y unicidad de la raíz

En el conjunto de los números reales, los radicales de índice par cuyas cantidades subradicales son negativas no están definidos. En los demás casos se establece la existencia de la raíz, cuyo valor intrínseco es único.

Exponente fraccionario

$$\boxed{a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} = b \leftrightarrow b^n = a,\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 2}$$

Ejemplos explicativos

- $49^{1/2} = \sqrt{49} = 7 \leftrightarrow 7^2 = 49$
- $64^{1/3} = \sqrt[3]{64} = 4 \leftrightarrow 4^3 = 64$
- $(-32)^{1/5} = \sqrt[5]{-32} = -2 \leftrightarrow (-2)^5 = -32$
- $(-1)^{\frac{1}{2n+1}} = \sqrt[2n+1]{-1} = -1 \leftrightarrow (-1)^{2n+1} = -1, \forall n \in \mathbb{N}$

Podemos establecer la siguiente regla de signos para las raíces, cuyos subradicales son positivos o negativos, veamos

$\forall n \in \mathbb{Z}^+$, se cumple $\sqrt[2n+1]{(+)} = (+)$	$\forall n \in \mathbb{Z}^+$, se cumple $\sqrt[2n+1]{(-)} = (-)$
$\forall n \in \mathbb{Z}^+$, se cumple $\sqrt[2n]{(+)} = (+)$	$\forall n \in \mathbb{Z}^+$, se cumple $\sqrt[2n]{(-)} =$ No está definido

De lo anterior, las cantidades $(2n+1)$ y $2n$ nos expresan una cantidad impar y par, respectivamente.

Ejemplos explicativos

- $\sqrt[5]{+243} = +3$
- $\sqrt[3]{-27} = -3$
- $\sqrt[4]{+625} = +5$
- $\sqrt[6]{-64} =$ Valor no definido

Propiedades de la radicación

Teorema 6

Generalización del exponente fraccionario.

$$\boxed{a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \quad \{m; n\} \subset \mathbb{N}^*}$$

Ejemplos explicativos

- $16^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{16}^3 = 2^3 = 8$
- $(-32)^{\frac{4}{5}} = \sqrt[5]{-32}^4 = (-2)^4 = 16$
- $(-27)^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{-27}^5 = (-3)^5 = -243$

Teorema recíproco

$$\boxed{\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}}$$

Ejemplo explicativo

- $\sqrt[a+b]{x^{a^2-b^2}} = x^{\frac{a^2-b^2}{a+b}} = x^{\frac{(a+b)(a-b)}{a+b}} = x^{a-b}$

Es importante observar que si n es un número par, el valor de a no debe ser un real negativo.

Corolario 5

$$\boxed{\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a}^m, \{m; n\} \subset \mathbb{N}^*, n \geq 2}$$

Si n es par, el valor de a no debe ser negativo.

Corolario 6

$$\boxed{\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a}^m, \{m; n; p\} \subset \mathbb{N}^*, n \geq 2}$$

Si np es par, el valor de a no debe ser negativo.

Ejemplos explicativos

- $\sqrt[6]{5}^8 = \sqrt[3\cdot 2]{5}^{4\cdot 2} = \sqrt[3]{5}^4 = \sqrt[3]{5}^3 \cdot \sqrt[3]{5}^1 = 5\sqrt[3]{5}$
- $\sqrt[12]{2}^{21} = \sqrt[4\cdot 3]{2}^{7\cdot 3} = \sqrt[4]{2}^7 = \sqrt[4]{2}^4 \cdot \sqrt[4]{2}^3 = 2\sqrt[4]{8}$
- $\sqrt[9]{-3}^{15} = \sqrt[3\cdot 3]{-3}^{5\cdot 3} = \sqrt[3]{-3}^5 = \sqrt[3]{-3}^3 \cdot \sqrt[3]{-3}^2 = -3\sqrt[3]{9}$

Teorema 8

Raíz de una multiplicación indicada.

$$\boxed{\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 2}$$

Si n es par, a y b por separado no deben ser negativos.

Ejemplo explicativo

- $\sqrt[3]{64 \cdot 27} = \sqrt[3]{64} \cdot \sqrt[3]{27} = 4 \cdot 3 = 12$

Teorema 9

Raíz de una división indicada.

$$\boxed{\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \quad b \neq 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 2}$$

Si n es par, a y b por separado no deben ser negativos.

Ejemplo explicativo

- $\sqrt[4]{\frac{81}{16}} = \frac{\sqrt[4]{81}}{\sqrt[4]{16}} = \frac{3}{2}$

Teorema 10

Raíz de raíz.

$$\boxed{\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}}$$

Ejemplos explicativos

- $\sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[3\cdot 2]{64} = \sqrt[6]{64} = 2$
- $\sqrt[5]{\sqrt[4]{\sqrt[3]{x^{180}}}} = \sqrt[5\cdot 4\cdot 3]{x^{180}} = \sqrt[60]{x^{180}} = \sqrt[60]{(x^3)^{60}}$
  $= |x^3| = x^3$, si $x > 0$

Finalmente, no debemos olvidar los siguientes detalles, en la transformación de un radical:

- $\sqrt[6]{a^6} = a,\ \forall a \geq 0$
- $\sqrt[6]{a^6} = |a|,\ \forall a \in \mathbb{R}$
- $\sqrt[4]{a^{12}} = a^{\frac{12}{4}} = a^3,\ \forall a \geq 0$
- $\sqrt[4]{a^{12}} = \sqrt[4]{(a^3)^4} = |a^3|,\ \forall a \in \mathbb{R}$

Nota

El índice de la raíz siempre debe ser un número entero positivo.

Helicosíntesis

LEYES DE EXPONENTES

Exponente natural

$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \cdot a}_{n \text{ veces}},\ n \geq 1$

Exponente nulo

$a^0 = 1,\ a \neq 0$

Exponente negativo

- $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n},\ a \neq 0$
- $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^n,\ a \neq 0,\ b \neq 0$

Exponente fraccionario

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a}^m$

Raíz de una multiplicación

$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

Multiplicación de bases iguales

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

Potencia de una multiplicación

$(a^m \cdot a^n)^k = a^{mk} \cdot b^{nk}$

Raíz de una división

$\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}},\ b \neq 0$

División de bases iguales

$\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n},\ a \neq 0$

Potencia de una división

$\left(\dfrac{a^m}{b^n}\right)^k = \dfrac{a^{mk}}{b^{nk}}$

Raíz de raíz

$\sqrt[m]{\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}}} = \sqrt[mnp]{a}$

Potencia de potencia

$\left((a^m)^n\right)^p = a^{mnp}$

Exponente de potencia

$x^{a^{b^c}} = x^{a^m} = x^n = p$

Nota importante

$\sqrt{a^2} = |a|$

En general

$\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|$

Consecuencia

$\sqrt[m]{x^a \cdot \sqrt[n]{x^b \cdot \sqrt[p]{x^c}}} = \sqrt[mnp]{x^{(an+b)p+c}}$

$\sqrt[m]{x^a \div \sqrt[n]{x^b \div \sqrt[p]{x^c}}} = \sqrt[mnp]{x^{(an-b)p+c}}$

Problemas resueltos

1. Reduzca la expresión

$$P=\sqrt[20]{\frac{a^7\left[b^2\left(ab^5\right)^3\right]^2}{b^8\left[a^3\left(ba^4\right)^2\right]^3}}$$

Resolución

Aplicando: $\boxed{(a^m\cdot b^n)^k=a^{mk}\cdot b^{nk}}$

$$P=\sqrt[20]{\frac{a^7b^4\left(ab^5\right)^6}{b^8a^9\left(ba^4\right)^6}}=\sqrt[20]{\frac{a^7b^4a^6b^{30}}{b^8a^9b^6a^{24}}}$$

Aplicando: $\boxed{a^m\cdot a^n=a^{m+n}}$ $\boxed{a^m\div a^n=a^{m-n}}$

$$P=\sqrt[20]{\frac{a^{13}b^{34}}{a^{33}b^{14}}}=\sqrt[20]{a^{-20}b^{20}}=a^{-1}b$$

$$\therefore\ P=\frac{b}{a}$$

Rpta.: $\frac{b}{a}$

2. Efectúe

$$M=\left[(-32)^{-2/5}+(-32)^{-3/5}\right]^{-3^{-1}}$$

Resolución

Aplicando: $\boxed{x^{m/n}=\sqrt[n]{x^m}}$

$$M=\left[\sqrt[5]{(-32)}^{-2}+\sqrt[5]{(-32)}^{-3}\right]^{-3^{-1}}$$

$$M=\left[(-2)^{-2}+(-2)^{-3}\right]^{-3^{-1}}$$

Aplicando: $\boxed{x^{-n}=\frac{1}{x^n}}$, $x\neq 0$

$$M=\left[\frac{1}{(-2)^2}+\frac{1}{(-2)^3}\right]^{-\frac{1}{3}}=\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\right)^{-\frac{1}{3}}$$

$$M=\left(\frac{1}{8}\right)^{-1/3}=(8)^{1/3}$$

$$M=\sqrt[3]{8}=2$$

$$\therefore\ M=2$$

Rpta.: 2

3. Simplifique

$$T=\frac{3^{n-1}+3^{n-3}}{3^{n-4}+3^{n-6}}+\frac{2^{n-1}+2^{n-3}}{2^{n-4}+2^{n-6}}$$

Resolución

Factorizando

$$T=\frac{3^{n-3}\cancel{\left(3^2+1\right)}}{3^{n-6}\cancel{\left(3^2+1\right)}}+\frac{2^{n-3}\cancel{\left(2^2+1\right)}}{2^{n-6}\cancel{\left(2^2+1\right)}}$$

Simplificando

$$T=\frac{3^{n-3}}{3^{n-6}}+\frac{2^{n-3}}{2^{n-6}}$$

Luego

$$T=3^{n-3-(n-6)}+2^{n-3-(n-6)}$$

$$T=3^3+2^3=27+8$$

$$\therefore\ T=35$$

Rpta.: 35

4. Reduzca la expresión

$$F=\frac{16^4\cdot 32^3\cdot 27^5\cdot 3}{16^7\cdot 81^4}$$

Resolución

Recordando $(a^n)^m=a^{nm}$

$$F=\frac{\left(2^4\right)^4\left(2^5\right)^3\left(3^3\right)^5 3}{\left(2^4\right)^7\left(3^4\right)^4}$$

$$F=\frac{2^{16}\cdot 2^{15}\cdot 3^{15}\cdot 3}{2^{28}\cdot 3^{16}}=\frac{2^{31}\cdot \cancel{3^{16}}}{2^{28}\cdot \cancel{3^{16}}}=2^3$$

$$\therefore\ F=8$$

Rpta.: 8

5. Si $2^{-x}=\frac{1}{3}$, evalúe $Q=\left(4^x\right)^2+\left(8^x\right)^{\frac{1}{3}}$.

Resolución

Del dato

$$2^{-x}=\frac{1}{3}\rightarrow 2^x=3$$

En Q se tiene

$$Q=\left(\left(2^2\right)^x\right)^2+\left(\left(2^{\cancel{3}}\right)^x\right)^{\frac{1}{\cancel{3}}}$$

$$Q=\left(2^x\right)^4+2^x$$

Reemplazando $2^x=3$

$$Q=3^4+3$$

$$Q=84$$

Rpta.: 84

Helicopráctica

1. Efectúe

$$P=\frac{\left((2^2)^6\right)^2\left((2^{-2})^{-2}\right)^{-5}}{2^{8^2}\,(2^2)^{-31}}$$

2. Reduzca

$$Q=\left(\frac{1}{6}\right)^{-\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}}-\left(\frac{1}{4}\right)^{-\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}}$$

3. Luego de reducir

$$P=\left\{\left[a^{-3}\left(a^3\right)^2\right]^4\cdot a^{-5}\right\}^2\cdot a^{-3^2}$$

indique el exponente final de a.

4. A qué es igual

$$E=\sqrt[4]{x^3\cdot\sqrt[5]{x^4\cdot\sqrt[3]{x^2}}}\cdot\sqrt[30]{\sqrt{x}}$$

5. Halle el valor de

$$M=\sqrt[10]{\frac{\sqrt[3]{16}\cdot\sqrt[3]{16}\cdot\ldots(60\text{ factores})}{\sqrt[4]{128}\cdot\sqrt[4]{128}\cdot\ldots(40\text{ factores})}}$$

6. Simplifique

$$Q=\frac{3^{n+1}+3^{n+2}+3^{n+3}}{3^{n-1}+3^{n-2}+3^{n-3}}$$

7. Si se tiene la información

A: $x^a y^b=3^a$

B: $x^b y^a=3^b$

evalúe la expresión $\left(\frac{x}{y}\right)^{xy}$.

8. Si $a^b=2$ y $b^a=5$, halle el valor de

$$P=a^{b^{a+1}}+b^{a^{b+1}}$$

Helicotaller

Nivel I

1. Efectúe

$$M=\frac{\left((3^4)^3\right)^2\left((3^{-1})^{-5}\right)^{-4}}{3^{4^3}\,(3^{31})^{-2}}$$

Resolución

2. Simplifique

$$T=\left(\frac{1}{5}\right)^{-\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}}-\left(\frac{1}{3}\right)^{-\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}}$$

Resolución

Nivel II

3. Si el exponente final de m luego de efectuar E, me indica el número de hijos.

$$E = \left[\left[m^{-6}\cdot\left(m^{4}\right)^{-2}\right]^{-1}\cdot m^{-9}\right]^{-2}\cdot m^{-2^{3}};\ m\neq 0$$

¿Cuántos hijos tengo?

Resolución

4. Reduzca

$$Q = \sqrt[6]{x^{5}\sqrt[3]{x^{2}\sqrt[3]{x}}}\cdot\sqrt[27]{x}$$

Resolución

5. Efectúe

$$M = \sqrt[6]{\frac{\sqrt[5]{8}\cdot\sqrt[5]{8}\cdot\ldots(120\text{ factores})}{\sqrt[4]{32}\cdot\sqrt[4]{32}\cdot\ldots(60\text{ factores})}}$$

Resolución

Nivel III

6. El dueño del colegio Saco Oliveros, en un local tiene como cantidad de alumnos el valor de x de:

$$Q = \frac{5^{x+1}+5^{x+2}+5^{x+3}+5^{x+4}}{5^{x-1}+5^{x-2}+5^{x-3}+5^{x-4}}$$

¿Cuántos alumnos tiene?

Resolución

7. Si Víctor tiene la siguiente información:

$$A = \sqrt[2x]{2^{x-y}}\ ,\ B = \sqrt[3x]{2^{x+y}}\ \text{ y }\ C = \sqrt[6x]{2^{-x-y}}$$

¿a qué resultado llegará al operar $\frac{AB}{C}$?

Resolución

8. Si $ab = b^b = 2$, reduzca

$$M = ab^{ab^{ab}}$$

Resolución

Helicodesafío

1. Sabiendo que $abc = 2\sqrt[7]{2}$, halle el valor de

$$T = \sqrt{a\sqrt{b\sqrt{c}}} \cdot \sqrt{b\sqrt{c\sqrt{a}}} \cdot \sqrt{c\sqrt{a\sqrt{b}}}$$

A) 8 B) 4 C) 2
D) $\sqrt[7]{2}$ E) $2\sqrt{2}$

2. Simplifique

$$P = \frac{\sqrt[a^2+a+1]{x^{a^3-1}} \cdot \sqrt[a+1]{x^{2a+2}}}{\left(\sqrt[1-a]{x^{a^2-a}}\right)^{-1}},\ x \neq 0$$

A) x B) x^2 C) x^a
D) 1 E) $\frac{1}{x}$

Helicorreto

1. Reduzca

$$M = \sqrt[30]{\frac{\sqrt[5]{x^2} \cdot \sqrt[5]{x^2} \cdot \sqrt[5]{x^2} \cdot \ldots(50\text{ factores})}{\sqrt{x^5} \cdot \sqrt{x^5} \cdot \sqrt{x^5} \cdot \ldots(20\text{ factores})}}$$

A) x B) x^{-1} C) x^2
D) x^{-2} E) 1

2. Halle el valor de

$$P = 32^{-25^{-4^{-2^{-1}}}}$$

A) 2 B) 4 C) 16
D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{4}$

3. Efectúe

$$M = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^{-\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}} + \left(\frac{1}{5}\right)^{-\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-5}}$$

A) 2 B) 41 C) 32
D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{8}$

4. Simplifique

$$H = \sqrt[2^{m+2}]{\sqrt[2^{m+3}]{\sqrt[2^{m+4}]{5^{2^{3m+10}}}}}$$

A) 5 B) $\frac{1}{5}$ C) 15
D) 25 E) 10

5. Reduzca

$$M = \frac{\left(\left(\sqrt{2}^2\right)^2\right)^3 \cdot \left(\left(\sqrt{2}^3\right)^4\right)^6 \cdot \left(\sqrt{2}^5\right)^4}{\left(\sqrt{2}^4\right)^5 \cdot \left(\left(\sqrt{2}^7\right)^3\right)^4}$$

A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) $\frac{1}{2}$
D) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ E) 4

Helicotarea

Nivel I

1. Efectúe

$$P=\frac{\left((3^5)^2\right)^3\left((3^2)^4\right)^2(3^3)^3}{3^{3^2}(3^4)^{11}}$$

A) 5 B) 9 C) $\frac{1}{5}$
D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{9}$

2. Efectúe

$$I=\left[\left(\frac{1}{343}\right)^{-3^{-1}}-\left(\frac{1}{3125}\right)^{-5^{-1}}-\left(\frac{1}{64}\right)^{-6^{-1}}\right]^{2013}$$

A) 1 B) 2 C) –1
D) 0 E) $\frac{1}{2}$

3. Halle el exponente final luego de simplificar

$$T=\frac{4^{2m-3}\cdot 8^{m+2}\cdot 2^{3m+5}}{32^{2m+1}}$$

A) 5 B) 4 C) 3
D) 2 E) 1

4. T me indica el número de hijos de mi tío Víctor profesor de Saco Oliveros:

$$T=\sqrt[\sqrt{2}]{\sqrt{\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}}\sqrt{5^{\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}}}}$$

el número de hijos es

A) $\sqrt{5}$. B) $\sqrt[4]{5}$. C) 5.
D) 5^2. E) 5^3.

Nivel II

5. Efectúe

$$Q=\sqrt[30]{\frac{\sqrt[5]{9}\cdot\sqrt[5]{9}\cdot\sqrt[5]{9}\cdot\ldots(50\text{ factores})}{\sqrt{243}\cdot\sqrt{243}\cdot\sqrt{243}\cdot\ldots(20\text{ factores})}}$$

A) $\frac{1}{3}$ B) 3 C) $\frac{1}{9}$
D) 27 E) 12

6. Simplifique

$$Q=\frac{a^{-1^{2^{3^4}}}}{\left\{\left[\left(a^{-1}\right)^{-2}\right]^{-3}\right\}^4};\quad a\neq 0$$

A) a^{25} B) a^{23} C) a^4
D) a^{16} E) a

7. Simplifique

$$T=\sqrt[5]{\frac{2^{n+1}+2^{n+2}+2^{n+3}+2^{n+4}}{2^{n-1}+2^{n-2}+2^{n-3}+2^{n-4}}}$$

A) 4 B) 8 C) 2
D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{4}$

8. Luego de resolver E, el resultado señala mi propina de la semana dice Pepito.

$$E=\sqrt[n]{\frac{2^n+3^n+5^n}{6^{-n}+10^{-n}+15^{-n}}}$$

La propina que recibe Pepito es

A) 1. B) 10. C) $\frac{1}{10}$.
D) 30. E) 6.

Nivel III

9. Reduzca

$$R=\underbrace{\sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt[3]{\ldots\sqrt[3]{\sqrt[3]{3^{3^{n-1}}}}}}}}_{(n-2)\text{ radicales}}$$

A) 3 B) 9 C) 27
D) 81 E) $\frac{1}{3}$

10. Si $\sqrt{x}^{\sqrt{x}}=2$, reduzca

$$E=\sqrt{x^{\sqrt{4x}}}+\sqrt{x^{\sqrt{9x}}}+\sqrt{x^{\sqrt{16x}}}$$

A) 2 B) 28 C) 4
D) 14 E) 20

POLINOMIOS

CAPÍTULO 2

MATEMÁTICA

Aprendizajes esperados

- Obtiene y calcula el valor numérico de un polinomio.
- Reconoce e identifica los diferentes tipos de polinomios.

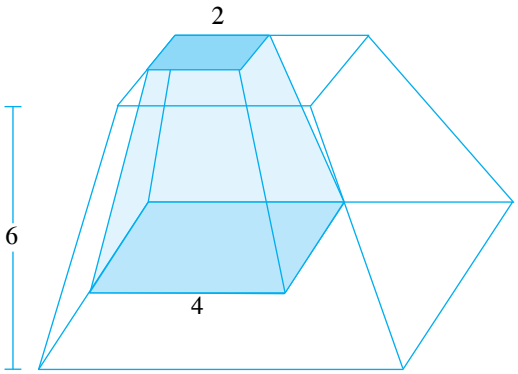
Helicocuriosidades

Volumen de una pirámide truncada

La resolución de ecuaciones algebraicas, o la determinación de las raíces de polinomios, está entre los problemas más antiguos de la matemática. Sin embargo, la elegante y práctica notación que utilizamos actualmente se desarrolló a partir del siglo XV.

En el problema 14.º del papiro de Moscú (ca. 1890 a. C.) se pide calcular el volumen de un tronco de pirámide cuadrangular. El escriba expone los pasos: eleva al cuadrado 2 y 4, multiplica 2 por 4, suma los anteriores resultados y multiplícalo por un tercio de 6; finaliza diciendo: "Ves, es 56, lo has calculado correctamente". En notación algebraica actual sería: $v = h(t^2+b^2+bt)/3$, un polinomio de cuatro variables (v, h, t, b) que, conociendo tres, permite obtener la cuarta variable.

La máquina diferencial de Charles Babbage fue diseñada para crear automáticamente tablas de valores de funciones logarítmicas y diferenciales, evaluando aproximaciones polinómicas en muchos puntos, usando el método de las diferencias de Newton.



$$v = \frac{h\left(t^2 + bt + b^2\right)}{3}$$

Helicoteoría

POLINOMIOS

1. Valor numérico de un polinomio

Es el valor obtenido como resultado luego de efectuar operaciones en un polinomio al reemplazar los valores dados a sus variables.

Recuerda

- Expresión algebraica
- Término algebraico

Ejemplo

Halle el valor numérico de $P(x) = 2x^3 - 3x + 2$ cuando $x = 2$.

Resolución

Nos piden calcular el valor de $P(x)$ cuando $x = 2$.

Para ello reemplazaremos "x por 2"; cuando se hace el reemplazo es necesario emplear paréntesis.

$$P(2) = 2(2)^3 - 3(2) + 2$$

$$\therefore \boxed{P(2) = 12}$$

Sabía que...

$P(x) = k$, k es un escalar, se llama polinomio constante y para cualquier valor asignado a x siempre será el mismo valor numérico, k.

Ejemplo

$P(x) = 5$

Si $x = 3 \rightarrow P(3) = 5$

$x = 2 \rightarrow P(2) = 5$

$x = 2007 \rightarrow P(2007) = 5$

Primer tipo

Cuando se hace el reemplazo por la variable indicada.

Ejemplo

Si $Q(x) = 3x - 5$, calcule $\dfrac{Q(x-1) - Q(x)}{3}$.

Resolución

Reemplazando x por $x - 1$ en $Q(x)$.

Aquí $x = x - 1$, $Q(x) = 3x - 5$

$$Q(x-1) = 3(x-1) - 5$$

$$Q(x-1) = 3x - 8$$

Reemplazando en

$$\frac{Q(x-1) - Q(x)}{3} = \frac{3x - 8 - (3x - 5)}{3}$$

$$= \frac{3x - 8 - 3x + 5}{3}$$

$$= \frac{-3}{3}$$

Rpta.: -1

Segundo tipo

Cuando se calcula el valor de la variable antes de su reemplazo.

Ejemplo

Si $H(3x - 1) = 2x^3 - 1$, evalúe $H(5)$.

Resolución

1.º Igualamos $3x - 1 = 5$

$$3x = 6$$

$$x = 2$$

2.º Reemplazamos en

$$H(3x - 1) = 2x^3 - 1, \quad x = 2$$

$$H(5) = 2(2)^3 - 1$$

$$H(5) = 2(8) - 1$$

Rpta.: 15

Tercer tipo

Cuando se hace un cambio de variable para obtener el polinomio original.

Ejemplo

Se define $P(x+5) = 2x + 1$. Determine $P(x)$.

Resolución

Haciendo un cambio de variable:

$x + 5$ (asignación de izquierda a derecha)

$$\boxed{x + 5 = a}$$

Despejando x.

$$x = a - 5$$

Reemplazando en $P(x + 5)$: $x = a - 5$

$$P(x + 5) = 2x + 1$$

$$P(a) = 2(a - 5) + 1$$

$$P(a) = 2a - 10 + 1$$

$$P(a) = 2a - 9$$

Reemplazo de variable auxiliar $\boxed{a = x}$

$$P(x) = 2x - 9$$

Rpta.: $2x - 9$

Propiedades

1. Para determinar la suma de coeficientes de un polinomio, se asigna a la variable el valor 1, es decir, para $x = 1$.

$$\boxed{\Sigma\text{coef}(P) = P(1)}$$

Ejemplo: Calcule la suma de coeficientes de

$$P(x) = 3(x-2)^5 + 2007x + 1$$

Resolución

$$\Sigma\text{coef}(P(x)) = P(1) = 3(1-2)^5 + 2007(1) + 1$$

$$\Sigma\text{coef}(P(x)) = 3(-1)^5 + 2007 + 1$$

$$\Sigma\text{coef}(P(x)) = -3 + 2008$$

$$\therefore \boxed{\Sigma\text{coef}(P) = 2005}$$

2. Para determinar el término independiente de un polinomio, se asigna a la variable el valor cero, es decir, para $x = 0$.

$$\boxed{TI(P) = P(0)}$$

Ejemplo: Halle el término independiente de $P(x)$.

$$P(x) = 2(x-1)^{2008} + 3(x-1)^{2009} + 5$$

Resolución

$$TI(P(x)) = P(0) = 2(0-1)^{2008} + 3(0-1)^{2009} + 5$$

$$TI(P(x)) = 2(-1)^{2008} + 3(-1)^{2009} + 5$$

$$TI(P(x)) = 2(1) + 3(-1) + 5$$

$$\therefore \boxed{TI(P) = 4}$$

2. Grado de una expresión algebraica racional entera

El grado de una expresión viene dado por los exponentes de sus variables, sin interesar la naturaleza de sus coeficientes.

A. Para un monomio

a. Grado absoluto (GA): Se determina sumando todos los exponentes de las variables.

b. Grado relativo (GR): Se determina ubicando el exponente de la variable referida en dicha expresión.

Ejemplo explicativo

Dado el monomio $M(x, y, z) = \sqrt{2}x^5y^3z^4$.

- El grado absoluto será
  $GA(M) = 5 + 3 + 4 = 12$
- Con respecto a una de sus variables
  $GR(x) = 5$, $GR(y) = 3$ y $GR(z) = 4$

B. Para un polinomio

a. Grado absoluto (GA): Se determina ubicando el mayor grado absoluto de uno de sus términos.

b. Grado relativo (GR): Se determina ubicando el mayor exponente de la variable referida en dicha expresión.

Ejemplo explicativo

Sea el polinomio

$$P(x, y) = \underbrace{3x^8y^4}_{T_1} + \underbrace{7x^5y^6}_{T_2} - \underbrace{4x^2y^7}_{T_3}$$

- Obtención del grado absoluto de cada término

$GA(T_1) = 8 + 4 = 12$ (Es el mayor)

$GA(T_2) = 5 + 6 = 11$

$GA(T_3) = 2 + 7 = 9$

Por lo tanto: $GA(P) = 12$

Cálculo del grado relativo

Mayor exponente de x: $GR(x) = 8$

Mayor exponente de y: $GR(y) = 7$

3. Grado en las operaciones algebraicas

A. Adición y sustracción

Dados $\text{grado}(P) = m$

$\text{grado}(Q) = n$, donde $m > n$

Se define: $\boxed{\begin{array}{l}\text{grado}(P + Q) = m \\ \text{grado}(P - Q) = m\end{array}}$

B. Multiplicación

Dados $\text{grado}(P) = m$

$\text{grado}(Q) = n$

Se define: $\boxed{\text{grado}(P \times Q) = m + n}$

C. División

Dados: $\text{grado}(P) = m$

$\text{grado}(Q) = n$, donde $m \geq n$

Se define: $\boxed{\text{grado}\left(\dfrac{P}{Q}\right) = m - n}$

D. Potenciación

Dado $\text{grado}(P) = m$ y n un número natural cualquiera.

Se define $\boxed{\text{grado}(P^n) = m \cdot n}$

E. Radicación

Dado grado(P) $= m$ y n un número natural, tal que $n \geq 2$.

Se define $\boxed{\text{grado}\left(\sqrt[n]{P}\right) = \dfrac{m}{n}}$

Ejemplo explicativo

Dados grado(P) $= 3$ y grado(Q) $= 2$, determine el grado de la expresión

$$E = 9P^4 + 8Q^5 - 6PQ$$

- Calculando por separado el grado de cada término

  grado$(9P^4) = 3 \cdot 4 = 12$ (Es el mayor)

  grado$(8Q^5) = 2 \cdot 5 = 10$

  grado$(6PQ) = 3 + 2 = 5$

  Grado de la expresión: 12

Rpta.: 12

4. Polinomios especiales

Son aquellas expresiones enteras cuyas características (grados, coeficientes y variables) y por la forma como se presentan, guardan ciertas propiedades implícitas que las hacen notables. En este nivel, por sus aplicaciones usuales, nos interesa el estudio de los siguientes polinomios:

A. Polinomio ordenado

Con respecto a una variable, es aquel polinomio en la cual los valores de los exponentes de dicha variable, solo aumentan o disminuyen según que la ordenación sea creciente o decreciente.

La variable que presenta esta característica se denomina ordenatriz.

Ejemplos

- En el polinomio

  $$P(x, y) = 6x^7y^2 + 5x^5y^4 - 8x^3y^6 + 4y^9$$

  La variable x es ordenatriz decreciente de P.

  La variable y es ordenatriz creciente de P.

- En la expresión racional

  $$Q(x, y) = \sqrt{2}x^8y + 3x^5y^4 + 0{,}6x^9y^7 - \pi x^4y^{10}$$

  No existe una ordenación respecto de x.

  Respecto de y está ordenado en forma creciente.

B. Polinomio completo

Con respecto a una variable, es aquel polinomio en la cual, los valores de los exponentes de dicha variable aparecen de manera consecutiva desde el mayor hasta el cero inclusive, sin interesar la ordenación presentada.

Ejemplo

El polinomio mostrado

$$F(x, y) = 6xy^4 + 5x^3y^2 - 7x^2y + 8x^4y^5 - 2y^6$$

es completo respecto de x, pero incompleto respecto a y. Además, el término que no depende de x es $(-2y^6)$. Es decir

$$\boxed{TI(F(x)) = -2y^6}$$

Propiedades usuales

Corolario

En todo polinomio completo de una variable, el número de términos es igual al grado de la expresión aumentado en la unidad.

Es decir $\boxed{\text{N.º de términos} = \text{grado} + 1}$

Ejemplo

En el polinomio

$P(x) = 4x + 7x^3 + 5 + 6x^5 + 2x^2 + 8x^4$

N.º de términos $=$ grado(P) $+ 1$

N.º de términos $= 5 + 1 = 6$

Corolario

En todo polinomio completo y ordenado de una variable, la diferencia de grados (en valor absoluto) de dos términos consecutivos, es igual a la unidad.

$$\boxed{|\text{grado}(T_k) - \text{grado}(T_{k+1})| = 1}$$

Ejemplo

En el polinomio

$$P(x) = \underbrace{a_0x^8}_{T_1} + \underbrace{a_1x^7}_{T_2} + \underbrace{a_2x^6}_{T_3} + \underbrace{a_3x^5}_{T_4} + \underbrace{a_4x^4}_{T_5} + \underbrace{a_5x^3}_{T_6} + \underbrace{a_6x^2}_{T_7} + \underbrace{a_7x}_{T_8} + \underbrace{a_8}_{T_9}$$

Veamos

$$|\text{grado}(T_2) - \text{grado}(T_3)| = |7 - 6| = |1| = 1$$

$$|\text{grado}(T_5) - \text{grado}(T_6)| = |4 - 3| = |1| = 1$$

C. Polinomio homogéneo

Un polinomio de dos o más términos y más de una variable es homogéneo, si dichos términos presentan el mismo grado absoluto, denominado grado de homogeneidad.

Ejemplo

En el polinomio

$$P(x) = \underbrace{7x^8y^4}_{T_1} + \underbrace{9x^5y^7}_{T_2} - \underbrace{8x^3y^9}_{T_3} + \underbrace{4xy^{11}}_{T_4}$$

$$GA(T_1) = GA(T_2) = GA(T_3) = GA(T_4) = 12$$

Es decir

grado de homogeneidad(P) = 12

Corolario

Todo polinomio homogéneo $P(x, y)$ de grado n verifica la siguiente sustitución literal:

$$\boxed{P(mx, my) = m^n P(x, y),\ m \in \mathbb{R}}$$

donde n es el grado de homogeneidad y la constante m es un escalar real.

Ejemplo

Dado el polinomio homogéneo

$$P(x, y) = 4x^3y^2 - 7x^2y^3 + 5xy^4$$

Sustituyendo: $x \to mx$, $y \to my$

$$P(mx, my) = 4(mx)^3(my)^2 - 7(mx)^2(my)^3 + 5(mx)(my)^4$$

$$P(mx, my) = m^5(4x^3y^2 - 7x^2y^3 + 5xy^4)$$

Finalmente: $P(mx, my) = m^5\, P(x, y),\ m \in \mathbb{R}$

Donde 5 es el grado de homogeneidad.

D. Polinomios idénticos

Dos o más polinomios del mismo grado y en las mismas variables son idénticos, si los valores numéricos resultantes de dichas expresiones son iguales, para cualquier sistema de valores asignados a sus variables. Es decir

$$\boxed{P(x, y) \equiv Q(x, y) \leftrightarrow P(a, b) = Q(a, b),\ \{a; b\} \subset \mathbb{R}}$$

Ejemplo

Dados $P(x, y) = (x+y)^4 - (x-y)^4$

$Q(x, y) = 8xy(x^2 + y^2)$

afirmamos que P y Q son idénticos, debido a que al evaluarlos para

$$\begin{matrix} x = 1 \\ y = 1 \end{matrix}\begin{cases} P(1, 1) = (1+1)^4 - (1-1)^4 = 16 \\ Q(1, 1) = 8(1)(1)(1^2 + 1^2) = 16 \end{cases}$$

Del mismo modo, para

$$\begin{matrix} x = 2 \\ y = 1 \end{matrix}\begin{cases} P(2, 1) = (2+1)^4 - (2-1)^4 = 81 - 1 = 80 \\ Q(2, 1) = 8(2)(1)(2^2 + 1^2) = 16(5) = 80 \end{cases}$$

Los valores numéricos resultantes siempre son iguales.

Teorema

Dos polinomios de las mismas características, tales como

$$P(x, y) = a_0x^m + a_1x^ny^p + a_2x^qy^r + \ldots + a^ky^s$$

$$Q(x, y) = b_0x^m + b_1x^ny^p + b_2x^qy^r + \ldots + b^ky^s$$

son idénticos, si los coeficientes de sus respectivos términos semejantes, son iguales. Es decir

$$\boxed{a_0 = b_0,\ a_1 = b_1,\ a_2 = b_2, \ldots, a_k = b_k}$$

Ejemplo

Si son idénticos los polinomios

$$P(x, y, z) = (a+b)x^5 + (b+c)y^3 + (c+a)x^4$$

$$Q(x, y, z) = 5x^5 + 3y^3 + 4x^4$$

calcule $a + b + c$.

➢ Por el teorema $a + b = 5$

$b + c = 3$

$c + a = 4$

Sumando las relaciones: $2(a + b + c) = 12$

Simplificando: $a + b + c = 6$

E. Polinomio idénticamente nulo

Es aquel polinomio de grado no definido, cuyo valor numérico resultante siempre es igual a cero, para cualquier sistema de valores que asumen sus variables. Es decir

$$\boxed{P(x, y) = 0,\ P(a, b) = 0,\ \{a; b\} \subset \mathbb{R}}$$

Ejemplo

Dado $P(x, y) = (x+4y)(x+y) - (x+3y)(x+2y) + 2y^2$

afirmamos que P es idénticamente nulo, debido a que al evaluarlo para

$$\begin{matrix} x = 1 \\ y = 1 \end{matrix}\left\{ P(1, 1) = (5)(2) - (4)(3) + 2 = 0 \right.$$

De igual manera, para

$$\begin{matrix} x = 1 \\ y = -1 \end{matrix}\left\{ P(1, -1) = (-3)(0) - (-2)(-1) + 2 = 0 \right.$$

Los valores numéricos siempre resultan ser iguales a cero.

Helicosíntesis

POLINOMIOS

$$P(x, y, z) = 3x^2yz + 2\sqrt{2}x^4y^2z^3 - \frac{2}{3}xyz$$

Valor numérico

Caso I

Si

$$P(x, y) = 3x^2 - 2xy + 2y^3$$

evalúe P(3, –2).

$P(3, -2) = 3(3)^2 - 2(3)(-2) + 2(-2)^3$

$P(3, -2) = 27 + 12 - 16$

$P(3, -2) = 23$

Caso II

Si

$$P(x + 3) = 3x^2 - 5x + 2$$

evalúe P(–1).

$\boxed{x + 3 = -1 \rightarrow x = -4}$

$P(-1) = 3(-4)^2 - 5(-4) + 2$

$P(-1) = 48 + 20 + 2 = 70$

Caso III (cambio de variable)

Si

$$P(x + 2) = 3x + 7$$

determine P(x + 1).

$x + 2 \rightarrow x + 1$

$x \rightarrow x - 1$

$P(x + 1) = 3(x - 1) + 7$

$P(x + 1) = 3x + 4$

Propiedades

Suma de coeficientes

$\Sigma\ \text{coef}(P(x)) = P(1)$

Término independiente

$TI(P(x)) = P(0)$

Monomio

$M(x, y) = 3\sqrt{2}x^7y^4$

Grado relativo (GR)

Exponente de la variable

$GR(x) = 7 \qquad GR(y) = 4$

Grado absoluto (GA)

Suma de exponentes de sus variables

$GA = 7 + 4 = 11$

Polinomio

$P(x, y) = 2x^4y^3 + 6x^7y^2 - 2x^2y^9$

Grado relativo (GR)

Es el mayor exponente de la variable indicada.

$GR(x) = 7 \qquad GR(y) = 9$

Grado absoluto (GA)

Es el mayor grado absoluto de cada término indicado.

$$P(x, y) = \underbrace{2x^4y^3}_{7} + \underbrace{6x^7y^2}_{9} - \underbrace{2x^2y^9}_{11}$$

$GA = 11$

Polinomio constante

$P(x) = k$, k: escalar

Polinomio lineal

$P(x) = ax + b,\ a \neq 0$

Polinomio cuadrático

$P(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$

Polinomio cúbico

$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d,\ a \neq 0$

Polinomios especiales

Polinomio ordenado

Con respecto a los exponentes de sus variables puede ser creciente o decreciente.

- $P(x) = 3x^5 + 2x^3 + 6x - 2$
- $P(x) = 3 - x + 2x^3 + x^7 - x^{10}$

Polinomio completo

Los exponentes de las variables indicada están en forma consecutiva desde el mayor exponente hasta el exponente cero.

- $P(x) = 3x^4 + 2x^3 + x^2 - x + 7$
- $P(x) = 5 + 2x - x^2 + 3x^3 - x^4$

Polinomio homogéneo

De dos o más términos en más de una variable; si dichos términos tienen el mismo grado absoluto.

$$P(x, y) = \underbrace{2x^4y^{10}}_{GA=14} + \underbrace{3x^8y^6}_{GA=14} - \underbrace{5x^{12}y^2}_{GA=14}$$

Problemas resueltos

1. Si $F(3x-4) = 5x+1$, efectúe

$$K = F(F(2)-6)$$

Resolución

Cálculo de F(2)

$3x-4 = 2 \rightarrow \boxed{x = 2}$

$F(2) = 5(2)+1 = 11$

Reemplazando

$K = F(11-6) = F(5)$

Cálculo de F(5)

$3x-4 = 5 \rightarrow \boxed{x = 3}$

$F(5) = 5(3)+1 = 16$

$$\therefore K = 16$$

Rpta.: 16

2. Si $P(x) = \dfrac{5x+6}{6x-5}$, determine $P(P(x))$.

Resolución

Reemplazando x por $P(x)$

$$P(P(x)) = \frac{5\left(\dfrac{5x+6}{6x-5}\right)+6}{6\left(\dfrac{5x+6}{6x-5}\right)-5}$$

Efectuando

$$P(P(x)) = \frac{25x+\cancel{30}+36x-\cancel{30}}{\cancel{30x}+36-\cancel{30x}+25}$$

Simplificando

$$P(P(x)) = \frac{61x}{61}$$

$$\therefore P(P(x)) = x$$

Rpta.: x

3. Dado el polinomio

$$P(x, y) = x^{3m+2n}y^4 + 3x^{2m-1}y^{-3n} + 5x^{2m}y^{n+7}$$

calcule mn sabiendo que dicho polinomio es homogéneo.

Resolución

Si es homogéneo los grados de sus términos son iguales.

$$\underbrace{3m+2n+4}_{(I)} = \underbrace{2m-3n-1}_{(II)} = \underbrace{2m+n+7}_{(III)}$$

De (II) y (III): $2m-3n-1 = 2m+n+7$

$$4n = -8 \rightarrow \boxed{n = -2}$$

De (I) y (III): $3m+2n+4 = 2m+n+7$

$$m = 3-n \rightarrow \boxed{m = 5}$$

$$mn = (5)(-2) = -10$$

$$\therefore mn = -10$$

Rpta.: -10

4. Calcule $a+b+c$ si

$$P(x) = (a-2)x^2 + (b-3)x + (c-4)$$

es idénticamente nulo.

Resolución

$$P(x) = \underbrace{(a-2)}_{0}x^2 + \underbrace{(b-3)}_{0}x + \underbrace{(c-4)}_{0} \equiv 0$$

$$a-2 = 0 \qquad b-3 = 0 \qquad c-4 = 0$$
$$a = 2 \qquad b = 3 \qquad c = 4$$

Por lo tanto: $a+b+c = 2+3+4 = 9$

Rpta.: 9

5. Evalúe $g(2)$ si

$$P(x) = 2x+1 \text{ y } P(g(x)) = 4x+3$$

Resolución

$P(x) = 2x+1$

$x <> g(x)$

$\rightarrow \underbrace{P(g(x))} = 2g(x) + 1$

$4x+3 = 2g(x)+1$

$4x+2 = 2g(x)$

$2x+1 = g(x)$

$\rightarrow g(2) = 2(2)+1 = 5$

Rpta.: 5

Helicopráctica

1. Si $P(2x-3)=x^2-3x+5$, calcule $P(3)+P(5)$.

2. Si

$$P(x)=2x-3$$
$$P(Q(x))=4x+5$$

evalúe $Q(5)$.

3. Determine el coeficiente y el término independiente de

$$F(x)=(x-3)^4+(x+2)^2(x+1)^4$$

4. Se tiene que $F(x)=\dfrac{3x+4}{4x-3}$, $x\neq\dfrac{3}{4}$. Determine $F(F(x))$.

5. Determine el coeficiente del monomio

$$P(x,y)=a^2bx^{3a-1}y^{a+2b}$$

si $GR(x)=5$ y es de grado 17.

6. Si para el polinomio

$$F(x,y)=3x^{a+2}y^{b+3}-5x^{a+1}y^{b-2}+3x^{a+3}y^{b+1}$$

$GR(x)=8$ y $GR(y)=10$, determine su grado absoluto.

7. Si el polinomio es completo y ordenado

$$P(x)=3x^5-2x^{a+3}+x^{a+b-3}+3x^{c-b}+4x+7$$

calcule $a+b+c$.

8. De la identidad

$$a(2x-3)+b(x+5)\equiv 10x+11$$

halle el valor de $a+b$.

Helicotaller

Nivel I

1. Sabiendo que $P(4x-5)=x^2+4x-7$, calcule

$$P(7)-P(3)$$

Resolución

2. Se tiene que

$$F(G(x))=6x+7$$
$$F(x)=3x-5$$

Evalúe $G(4)$, el resultado me indica el número de cajas de lápices que debe entregar el colegio Saco Oliveros y cada caja tiene 12 lápices. ¿Cuántos lápices se entregó?

Resolución

Nivel II

3. Determine el término independiente y la suma de coeficientes del polinomio

$$P(x) = (x-1)^{20} + (x+2)^2(x+1)^3$$

Resolución

4. Si $P(x) = \dfrac{2x-1}{x-2}$, donde $x \neq 2$, determine $P(P(x))$.

Resolución

5. Determine el coeficiente del monomio

$$T(x, y) = 2^m \cdot 5(m+n)x^{m-n}y^{2m+n}$$

si es de noveno grado y el grado relativo de y es 8.

Resolución

Nivel III

6. Juan al ingresar al aula Saco Oliveros encuentra este problema en la pizarra, efectúe

$$P(x, y) = 3x^{2m+n}y^{m+n+2} + 5x^{2m+n-3}y^{m+n+1}$$

si es de grado absoluto 10. Si $GR(x) - GR(y) = 4$, el valor de $2m+n$ es

Resolución

7. Si se cumple que

$$m(3x+5)-b(4x-2)\equiv 7x+29$$

calcule $2m-5b$.

Resolución

8. Si se cumple que

$$\left.\begin{array}{l} F(1)=4\times 1+1 \\ F(2)=8\times 4+8 \\ F(3)=12\times 9+27 \end{array}\right\}$$

halle el valor de M en $F(M)=5\times 10^6$.

Resolución

Helicodesafío

1. Si el polinomio

$$P(x,y)=3px^{n^2-5}y^{12}+5(p-q)x^py^q-(13q+4)x^{n^2}y^{3n-14}$$

es homogéneo, calcule la suma de sus coeficientes.

A) 331 B) 405 C) 452
D) 500 E) 820

2. Sea $f(x)$ un polinomio que cumple con

$$f(x+1)=3f(x)-2f(x-1)$$

además $f(4)=1$ y $f(6)=4$. Evalúe $f(5)$.

A) 8 B) 5 C) 2
D) 1 E) 6

Helicorreto

1. Si $P(x)=2x^2-5x+1$
$Q(x)=3x-1$

determine $P(Q(1))$.

A) 1 B) 2 C) –2
D) –1 E) 3

2. Si el término independiente del polinomio es 6

$$P(x)=(x-3)^2(x+1)^4+(x-1)^5(x+2)^2+a$$

halle el valor de a.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

3. Dado el monomio

$$M(x,y)=2^abx^{3a-1}y^{a+b}$$

si $GR(x)=8$ y $GA=16$, determine su coeficiente.

A) 10 B) 15 C) 40
D) 20 E) 80

4. Si el polinomio es completo y ordenado

$$F(x)=mn+4x^{m-3}+3x^2-nx^{n-3}$$

calcule la suma de coeficientes.

A) 12 B) 25 C) 50
D) 37 E) 30

5. Si el polinomio es homogéneo

$$P(x,y)=3x^{a+5}y^4+2x^8y^{10}-5x^{b+5}y^7$$

calcule $a-b$.

A) 1 B) 5 C) 10
D) 15 E) 3

Helicotarea

Nivel I

1. Sabiendo que $P(3x-4)=5x+1$, efectúe

$$E=P(P(2)-6)$$

A) 18 B) 26 C) 16
D) 12 E) 6

2. Si la suma de coeficientes del polinomio

$$P(x+1)=(x+2)^3(x-1)^6+(x-3)^2(x-2)^4+3b$$

es 200, halle el valor de b.

A) 48 B) 16 C) 12
D) 5 E) 9

3. Dado el polinomio lineal $f(x)$, donde se cumple que

$$f(f(x))=16x+25$$

determine $f(x)$ si es de coeficientes positivos.

A) $3x+2$ B) $4x-5$ C) $4x+2$
D) $4x+5$ E) $2x+5$

4. Arturo, profesor de Saco Oliveros dice a sus alumnos "El que resuelve el problema del monomio, tiene como premio el resultado en soles"

$$Q(x,y)=abx^{3a+2b}y^{2a+b}$$

donde $GR(x)=12$ y $GR(y)=7$, calcule $(ab)^2$.

A) 16 B) 25 C) 1
D) 6 E) 36

Nivel II

5. Dado el polinomio

$$P(x,y)=x^{2a}y^{b-2}+x^{2a-1}y^{b+5}-x^{2a+2}y^{b}+4x^{2a-3}y^{b+1}$$

determine el grado relativo de y si el $GA=24$ y $GR(x)=18$.

A) 6 B) 9 C) 3
D) 18 E) 12

6. Si el polinomio

$$P(x,y)=9x^{m+n-2}+7x^{2k-m-1}+5x^{p-k-1}+3x^{p-4}$$

es completo y ordenado en forma descendente, calcule $pkmn$.

A) 4 B) 16 C) 24
D) 32 E) 64

7. Si el polinomio es homogéneo

$$P(x,y)=2x^{a+2}y^{b+2}-3x^5y^4+5x^{a+1}y^{1-b}$$

calcule a^2+b^2.

A) 37 B) 16 C) 14
D) 27 E) 11

8. Si

$$P(x+1)=\frac{x+2}{x} \text{ y } P(G(x))=\frac{x}{x-2}$$

evalúe $G(7)$.

A) 2 B) 4 C) 6
D) 8 E) 10

Nivel III

9. Si $P(x)=ax+b$, además

$$P(P(P(x)))=8x+7$$

determine $P(x)$.

A) $x+1$ B) $x-1$ C) $3x-1$
D) $2x+1$ E) $2x-1$

10. Se tiene que

$$F(x+3)=2x-1$$

determine

$$E=\sqrt{F(x+1)-F(x-1)}$$

A) x B) 2 C) $2x$
D) 1 E) $x+1$

PRODUCTOS NOTABLES I

CAPÍTULO 3

MATEMÁTICA

Aprendizajes esperados

- Reconoce y aplica los productos notables más importantes.
- Utiliza y obtiene expresiones más simples a partir de expresiones dadas.

Helicocuriosidades

Construyendo el árbol pitagórico

La construcción se hace repitiendo unos cuantos pasos básicos:

Paso 1: dibuje un cuadrado. **Paso 2**: dibuje un triángulo rectángulo que tenga por hipotenusa uno de los lados del cuadrado. **Paso 3**: dibuje un cuadrado sobre cada uno de los dos catetos del triángulo dibujado en el paso 2. **Paso 4**: repita el paso 2 para cada uno de los cuadrados dibujados en el paso 3, usando como hipotenusa el lado opuesto al que ya se usó. **Paso 5**: repita el paso 3 usando cada uno de los dos triángulos dibujados en el paso 4. **Paso 6**: … continúe el proceso tanto como quiera.

Es muy sencillo entender la construcción, en la figura 1 se ilustra el resultado después de pocos pasos.

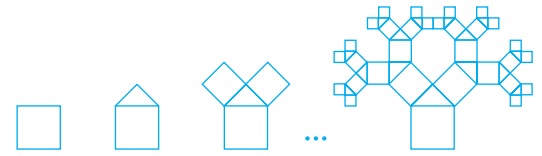


Fig. 1. La idea de la construcción de un árbol pitagórico

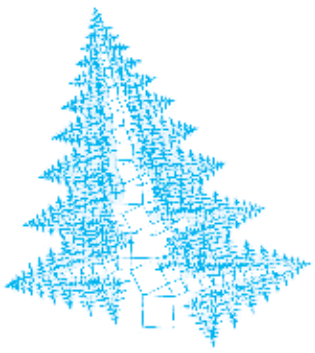


Fig. 2. Árbol pitagórico después de 50 pasos.

Helicoteoría

PRODUCTOS NOTABLES I

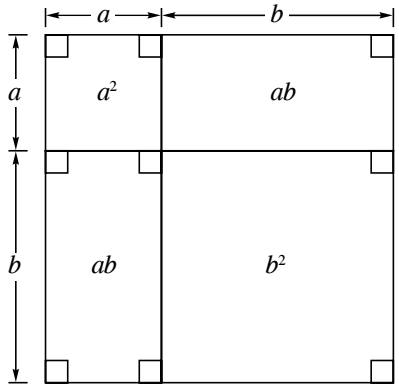
1. Productos notables

Son los resultados de ciertas multiplicaciones que se obtienen en forma directa, sin necesidad de efectuar la operación de multiplicación.

2. Principales equivalencias algebraicas

A. Cuadrado de un binomio

a. $\boxed{(a+b)^2 \equiv a^2+2ab+b^2}$

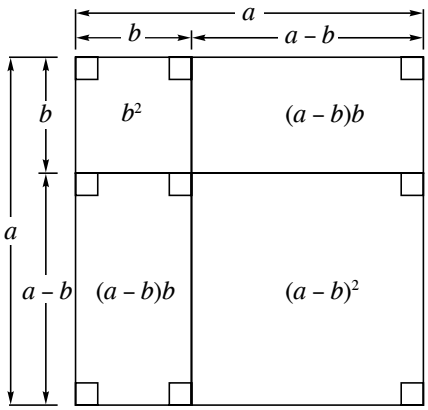


El área total es la suma de las áreas parciales.

$$(a+b)^2 = a^2+ab+ab+b^2$$

$$\therefore \boxed{(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2}$$

B.



El área total es la suma de las áreas parciales.

$$a^2 = b^2 + (a-b)b + (a-b)b + (a-b)^2$$

$$a^2 = \cancel{b^2} + ab - \cancel{b^2} + ab - b^2 + (a-b)^2$$

Ordenando

$$\boxed{(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2}$$

Sabía que...

El segundo miembro en cada caso se denomina trinomio cuadrado perfecto.

B. Identidad de Legendre

Si $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ … (I)

$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$ ….. (II)

De (I) + (II)

$$\boxed{(a+b)^2+(a-b)^2 = 2(a^2+b^2)}$$

De (I) – (II)

$$\boxed{(a+b)^2-(a-b)^2 = 4ab}$$

➢ Consecuencias importantes

$$(a+b)^4+(a-b)^4 = 2\left[\left(a^2+b^2\right)^2+(2ab)^2\right]$$

$$(a+b)^4-(a-b)^4 = 8ab\left(a^2+b^2\right)$$

Sabía que...

Todo trinomio de la forma ax^2+bx+c, con $a \neq 0$, es un cuadrado perfecto, si y solo si su discriminante es igual a cero.

Es decir $\Delta = b^2-4ac = 0$

$\Leftrightarrow b^2 = 4ac$

Ejercicios de aplicación

➢ $(2x+1)^2 =$

➢ $\left(5x^2-3\right)^2 =$

➢ $\left(2x^3-5y^2\right)^2 =$

➢ $\left(\sqrt{7}+\sqrt{2}\right)^2 =$

➢ $\left(2\sqrt{3}+2\sqrt{3}\right)^2 =$

➢ $\left(2\sqrt{7}-5\right)^2 =$

➢ $\left(5\sqrt{3}-2\right)^2 =$

➢ $\left(4x^2+1\right)^2+\left(4x^2-1\right)^2 =$

➢ $\left(5x^4+3x^2\right)^2+\left(5x^4-3x^2\right)^2 =$

➢ $\left(2\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)^2+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)^2 =$

➢ $\left(5\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right)^2-\left(5\sqrt{3}+2\sqrt{2}\right)^2 =$

C. Cubo de un binomio

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

- Identidades de Cauchy

$$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$$

$$(a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$$

- Consecuencias importantes

$$(a+b)^3 + (a-b)^3 = 2a(a^2 + 3b^2)$$

$$(a+b)^3 - (a-b)^3 = 2b(3a^2 + b^2)$$

D. Cuadrado de un trinomio

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac)$$

E. Cubo de un trinomio

- $(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+3ab(a+b)+3bc(b+c)+3ac(a+c)+6abc$
- $(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(a+c)$
- $(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+3(a+b+c)(ab+bc+ac)-3abc$

Helicosíntesis

PRODUCTOS NOTABLES I

Cuadrado de un binomio
- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Identidad de Legendre
- $(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2 + b^2)$
- $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$

Observación
- $(a+b)^2 = (b+a)^2$
- $(a-b)^2 = (b-a)^2$

Cubo de un binomio
- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Identidad de Cauchy
- $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$
- $(a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$

Consecuencias
- $(a+b)^3 + (a-b)^3 = 2a(a^2 + 3b^2)$
- $(a-b)^3 - (a-b)^3 = 2b(3a^2 + b^2)$

Cuadrado de un trinomio

$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac)$

$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3ab(a+b) + 3bc(b+c) + 3ac(a+c) + 6abc$

$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b)(b+c)(a+c)$

$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b+c)(ab+bc+ac) - 3abc$

Problemas resueltos

1. Efectúe

$$E = \sqrt[3]{\sqrt{50}+7} - \sqrt[3]{\sqrt{50}-7}$$

Resolución

Elevando al cubo

$$E^3 = \left(\sqrt[3]{\sqrt{50}+7}\right)^{\cancel{3}} - \left(\sqrt[3]{\sqrt{50}-7}\right)^{\cancel{3}} - 3\left(\sqrt[3]{\sqrt{50}^2 - 7^2}\right)E$$

$$E^3 = \cancel{\sqrt{50}} + 7 - \cancel{\sqrt{50}} + 7 - 3\sqrt[3]{1}\,E$$

$$E^3 = 14 - 3E \rightarrow E^3 + 3E = 14$$

Factorizando

$$E(E^2+3) = 14$$

$$E(E^2+3) = 2(2^2+3)$$

$$\therefore\ E = 2$$

Rpta.: 2

2. Simplifique

$$M = (x+y+z)^3 - (x+y)^3 - 3z(z+y+x)(x+y)$$

Resolución

Haciendo $\boxed{x+y=n}$

$$M = (n+z)^3 - n^3 - 3z(n+z)n$$

Efectuando

$$M = n^3 + 3n^2z + 3nz^2 + z^3 - n^3 - 3zn^2 - 3z^2n$$

$$\therefore\ M = z^3$$

Rpta.: z^3

3. Si $m+n+p=10$

$m^2+n^2+p^2=90$

obtenga el valor de

$$P = (m+n)^2 + (m+p)^2 + (n+p)^2$$

Resolución

Efectuando en P

$$P = m^2 + 2mn + n^2 + m^2 + 2mp + p^2 + n^2 + 2np + p^2$$

Agrupando convenientemente

$$P = m^2 + n^2 + p^2 + 2mn + 2mp + 2np + m^2 + n^2 + p^2$$

$$P = (m+n+p)^2 + m^2 + n^2 + p^2$$

Reemplazando las condiciones

$$P = (10)^2 + 90$$

$$\therefore\ P = 190$$

Rpta.: 190

4. Si $a+b = 3$ y $ab = 1$, calcule a^5+b^5.

Resolución

$$(a^2+b^2)(a^3+b^3) = a^5 + a^2b^2(a+b) + b^5$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2\underbrace{ab}_{1} + b^2 = 9$$

$$\rightarrow a^2+b^2 = 7$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3\underbrace{ab}_{1}\underbrace{(a+b)}_{3} + b^3 = 27$$

$$\rightarrow a^3+b^3 = 18$$

Luego

$$7\times 18 = a^5+b^5 + (1)^2(3)$$

$$\therefore\ a^5+b^5 = 123$$

Rpta.: 123

5. Si $(x+y)^2 = 2(x^2+y^2)$, evalúe

$$T = \frac{3x^3-y^3}{x^2y} + \frac{3x+2y}{5x} + \frac{6x}{2x+y}$$

Resolución

De la condición

$$x^2+2xy+y^2 = 2x^2+2y^2$$

$$0 = \underbrace{x^2-2xy+y^2}_{(x-y)^2=0} \qquad \boxed{x=y}$$

En T

$$T = \frac{2x^3}{x^3} + \frac{5x}{5x} + \frac{6x}{3x}$$

$$T = 2+1+2$$

$$\therefore\ T = 5$$

Rpta.: 5

Helicopráctica

1. Efectúe

$$T = (x+5)^2 + (x-3)^2 - 2(x+1)^2 - 15$$

2. Si $a+b=2$ y $ab=3$, efectúe

$$T = \frac{a^3+b^3}{a^2+b^2}$$

3. Si $x - x^{-1} = 4$, calcule $x^3 - x^{-3}$.

4. Sabiendo que

$$a+b=\sqrt{5} \quad \text{y} \quad ab=3$$

efectúe $E = a^6 + b^6$.

5. Simplifique

$$P = \frac{\left(3\sqrt{3}+2\sqrt{2}\right)^2 - \left(3\sqrt{3}-2\sqrt{2}\right)^2}{\left(2\sqrt{6}+3\right)^2 - \left(2\sqrt{6}-3\right)^2}$$

6. Si

$$x^2+y^2+z^2=5 \quad \text{y} \quad x+y+z=10$$

calcule $xy + yz + xz$.

7. Si

$$x+y+z=4 \quad \text{y} \quad (x+y)(y+z)(x+z)=5$$

calcule $x^3+y^3+z^3$.

8. Se informa que

$$a = 4+\sqrt{7}-\sqrt{5}$$
$$b = 4-\sqrt{7}+\sqrt{5}$$

Halle el valor de operar

$$T = (a+1)^2 + (b+1)^2 - 1 + 2ab$$

Helicotaller

Nivel I

1. Reduzca

$$Q = (x+3)^2 - (x-4)^2 + (x-7)^2 - x^2$$

Resolución

2. Sea

$$x+y=3$$
$$xy=4$$

efectúe $E = x^2+y^2+x^3+y^3$.

Resolución

Nivel II

3. Si $x + x^{-1} = 3$, calcule $x^3 + x^{-3}$.

Resolución

4. La promoción del 5.º de secundaria de Saco Oliveros de Lince tiene como el número de participantes el resultado del problema, si

$$x + y = \sqrt{7} \quad \ldots (1)$$

$$xy = 5 \ldots (2)$$

efectúe $T = x^6 + y^6$. ¿Cuántos participan en la promoción?

Resolución

5. Reduzca

$$E = \frac{\left(5\sqrt{10}+2\right)^2 - \left(5\sqrt{10}-2\right)^2}{\left(5\sqrt{2}+2\sqrt{5}\right)^2 - \left(5\sqrt{2}-2\sqrt{5}\right)^2}$$

Resolución

Nivel III

6. Si

$$x + y + z = 10 \text{ y } xy + yz + xz = 20$$

calcule $x^2 + y^2 + z^2$.

Resolución

7. Si

$$x+y+z=5 \text{ y } (x+y)(x+z)(y+z) = 45$$

calcule $x^3+y^3+z^3$.

Resolución

8. Se tiene como información que al resolver el siguiente problema: Si

$$a=\sqrt{2}+1$$

$$b=\sqrt{2}-1$$

Calcule a^4+b^4, esta es la edad del profesor Chumbi. ¿Cuál es la edad del profesor?

Resolución

Helicodesafío

1. De la condición

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}-\frac{6\sqrt{y}}{\sqrt{x}}=1;\ \forall x,\ y\in\mathbb{R}$$

reduzca $K=\dfrac{x+y}{x-4y}$.

A) 1 B) $\sqrt{x}$ C) 2
D) $\sqrt{xy}$ E) 5

2. Halle el valor numérico de

$$N=(a+1)^2+(b+1)^2+2ab-1$$

para $a=5-\sqrt{3}+\sqrt{5}$

$b=5+\sqrt{3}-\sqrt{5}$

A) 10 B) 121 C) 100
D) 200 E) 150

Helicorreto

1. Efectúe

$$P = (3x+1)^2 - (2x-1)^2 - 5x(x+2)$$

A) x B) 1 C) 0
D) x^2 E) $2x$

2. Si $a - b = \sqrt{10}$ y $ab = 6$, calcule a^2+b^2.

A) –2 B) 12 C) 28
D) 22 E) 10

3. Efectúe

$$K = (\sqrt{13}+\sqrt{5})^2 + (\sqrt{13}-\sqrt{5})^2$$

A) 36 B) 9 C) 18
D) 27 E) 10

4. Si $x - x^{-1} = \sqrt{5}$, determine $Q = x^3 - x^{-3}$.

A) $3\sqrt{5}$ B) $2\sqrt{5}$ C) $\sqrt{5}$
D) 5 E) $8\sqrt{5}$

5. Sea $x^2 + y^2 + z^2 = 13$; $x, y, z \in \mathbb{R}^+$,

$xy+yz+xz = 6$.

Calcule $x+y+z$.

A) 3 B) 5 C) 4
D) 12 E) 25

Helicotarea

Nivel I

1. Reduzca

$$T = (m+3)^3 - (m-3)^3 + (m^2-4) - 19m^2$$

A) 58 B) 27 C) 54
D) 50 E) 30

2. Si

$$a+b+c=2$$
$$a^2+b^2+c^2=12$$

efectúe $T=(a+b)^2+(a+c)^2+(b+c)^2$.

A) 1 B) 10 C) 2
D) 16 E) 17

3. Si $m+n=4$ y $mn=3$, donde $m>n$, calcule $m-n$.

A) $\frac{1}{2}$ B) 3 C) 4
D) 2 E) $\frac{1}{4}$

Nivel II

4. En el 4.º C del colegio Saco Oliveros se plantea el problema: Si $x^2+y^2+z^2=15$ y $xy+yz+xz=5$, calcule $x+y+z$. Siendo el resultado los hijos del profesor Víctor, ellos son

A) 3. B) 7. C) 10.
D) 9. E) 5.

5. Simplifique

$$E = \sqrt[3]{(x+1)^2\left(x^2+2x-1\right)-(x-1)^2\left(x^2-2x-1\right)}$$

A) x B) $x+1$ C) $2x$
D) $4x$ E) $8x$

6. Si $a^3+b^3+c^3=40$ y $(a+b)(b+c)(a+c)=8$, calcule $a+b+c$.

A) 2 B) 5 C) 8
D) 4 E) 12

7. Si

$$e = 2{,}7182\ldots$$

efectúe

$$M = \frac{\left(e^{2x} + e^{-2x}\right)^2 - \left(e^{2x} - e^{-2x}\right)^2}{12}$$

A) 3 B) $\frac{1}{3}$ C) 4

D) 6 E) $\frac{1}{4}$

8. Reduzca

$$P = \left(n^2 - 2n - 1\right)^2 - \left(n^2 - 2n - 2\right)^2 - 2(n-1)^2$$

A) -4 B) -1 C) -5

D) -10 E) -9

Nivel III

9. Si P es el número de desaprobados en álgebra, si $a - b = 1$ y $ab = \frac{3}{4}$, dé el valor de

$$P = a + a^2 + a^3 + b^3 + b^2 + b$$

¿cuántos son los desaprobados?

A) 2 B) 5 C) 8

D) 3 E) 9

10. Si $(a + b) = 7ab$, tal que $ab \neq 0$, simplifique

$$R = 23\left(\frac{a^6 + b^6}{a^4 + b^4}\right)$$

A) $7ab$ B) ab C) $110ab$

D) 100 E) $a + b$